安田女子大学紀要　46，207-218　2018.

２回折りパズルの構造分析

水　谷　昌　義

An Analysis of the Structure of a Puzzle by Folding the Sheet Twice

Masayoshi Mizutani

要　　旨

正方形を要素とする2回折りの折紙パズルの論理構造を分析する。指定の場所を、指定された向きで別に指定された位置に移動する方法について、解をひとつ提示することにより、実行可能性を検討した。その結果、ほとんどの移動が実行可能であることが明らかとなり、実行可能となるための充分条件も明らかにすることができた。

キーワード：折紙パズル，２回折り，折り筋，旋回角

1．は　じ　め　に

本稿では「２回折りパズル」の論理的構造について分析を行う。２回折りパズルとは、例えばFig.1のような用紙を２回だけ折って特定の文字列等を完成させるパズルで、この実例では「げんビ」という文字列を隙間のない３マスに横並びにできれば成功である。

２回折りパズルは以下のように定義できる：

定義１（２回折りパズル）

用紙は縦横に同じ大きさの正方形を並べた長方形の外形をもつ。表裏の区別があり、表面には図や文字が描かれている。山折りのみか谷折りのみの折り作業を２回行い、表面に書かれた図や文字を正しく整列させる。１回目の折り曲げ部分は２箇所以上の正方形頂点を通る。

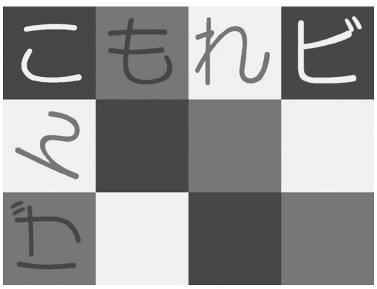

Fig.1　２回折りパズルの実例

長方形用紙の外側４辺および４つの角をあわせて「端」、端以外の内点の集合を「長方形の内部」という。縦横に並んでいる正方形ひとつひとつを「格子」、格子の頂点を「格子点」、格子の内点の集合を「格子の内部」という。また、折り曲げて紙に残る折り跡のことを「折り筋」という。

本稿で分析を行うための２回折りパズルについては、以下のようなより厳密な定義を与える：
定義２（分析用２回折りパズル）

横a個,縦b個に合同な正方形を並べた長方形。表裏の区別あり。特定の格子（左からpマス目、下からqマス目）を指定した位置（mマス右に、nマス上に）に指定した向き（回転なし,左右に90度回転,180度回転,のいずれか）で移動する。①折り作業は山折りのみか谷折りのみを２回。②１回目の折り筋は２箇所以上の格子点を通る。③２回目を折った結果、移動した格子は表が完全に見えており（一部が折れていたり他の格子に隠されていたりせず、最前面に存在する）、④指定した位置にあった格子と回転に対応する向きで重なる部分をもつ（直接でなく間に別のものが挟まっていてもよい）。

移動の目的を達成するにおいて、パズルの解に合理性と説得力を備えるために、①〜④の条件を満たすことが要求される。なお、回転や反転の操作により、一般性を失うことなく、$m \geqq n \geqq 0$, $m > 0$と仮定できる。また、紙面の大きさが有限であることから、$0 < p < a$, $0 < q \leqq b$, $0 < m \leqq a-p$, $0 \leqq n \leqq b-q$ がいずれも成り立つ。

折り作業の１回目の折り筋は両端が紙の端にある線分となる。２度目の折り筋は１回目の折り筋と長方形の内部では交わらない１〜２本の線分となるか、１回目の折り筋上の１点（端点でも可）から同じ角度で分岐する２本の線分となる。前者の場合、折り筋は長方形の端で点を共有していてもよい。後者の場合、２回目の折り筋は山折りと谷折りが１本ずつとなる。２回の折り筋が平行でない場合、１回目と２回目の折り筋またはその延長がなす角（90度以下のほう）を「旋回角」という。

全部でab個の格子と$(a+1)(b+1)$個の格子点が存在することになる。本稿では、左からpマス目、下からqマス目にある格子の場所を[p,q]と記すことにする。また、長方形の左下の格子点の座標を(0,0)とし、格子の1辺の長さを1とする。すなわち、[p,q]にある格子の左下の角の座標は$(p-1, q-1)$、右下,左上,右上の角の座標はそれぞれ$(p, q-1)$,$(p-1, q)$,(p, q)となる。

当初[p,q]に存在する、移動を指定される格子を「移動元」、目標位置にある[p+m,q+n]の格子を「移動先」という。出来上がり状態において、移動元の下に移動先が来るわけであるから、移動元と、移動先が出来上がりにおいて移動元と重なる部分とは、１回目の折り筋で分離される。また、それらは２度目の折りで重なるわけであるから、１回目を折った時点で紙の表裏で線対称の位置になっている。

2. 回転させない場合

回転がないので、[p, q]の格子を[p+m, q+n]に平行移動すればよいことになる。

ただの平行移動であれば折り方は簡単で、まず座標(p, q)と$(p+m, q+n)$との垂直２等分線で谷折りし、次にそれと平行で(p, q)を通る線で山折りすればよい。実際の動作としては、移動元と移動先の右上の角どうしをあわせて紙を折り、移動元を移動先にあわせて折り返せばよい。

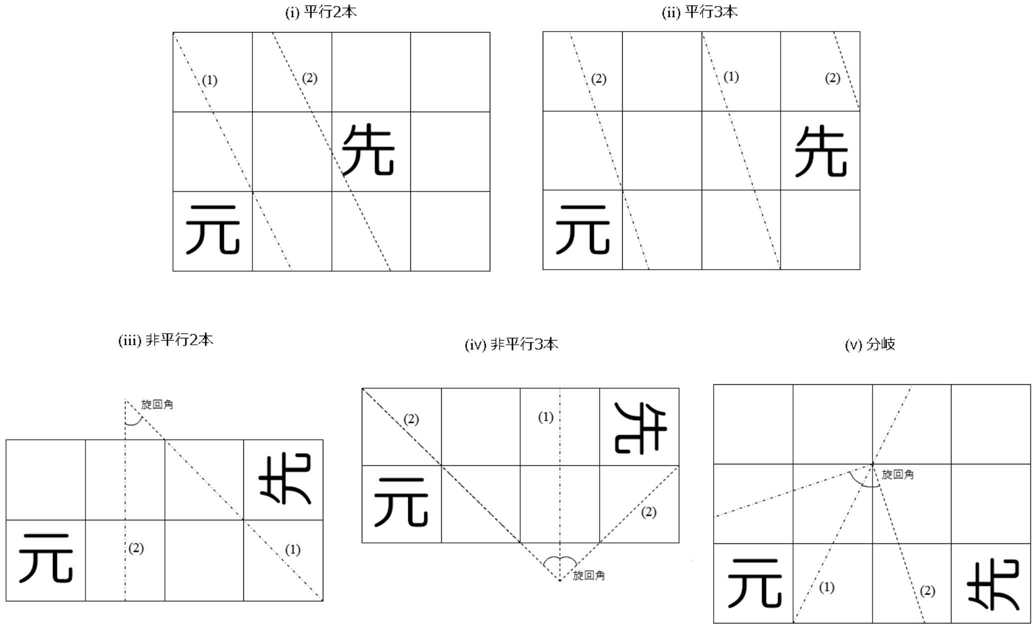

Fig.2　折り筋の状況

しかしながら、この折り方では定義２②を満たす保証がない。例えば$m=3, n=2$のとき、(p, q)と$(p+3, q+2)$の垂直２等分線は格子点をひとつも通らない[1]。どのような場合に格子点を通るかは、mとnの偶数奇数に関係するので整理しておく。なお、$m'=m/d$, $n'=n/d$とする、ここでdはmとnの最大公約数($n \neq 0$のとき)、または$d=m$($n=0$のとき)である。

補助定理１　m, nが共に偶数のとき、点$A(p,q)$と点$B(p+m, q+n)$との垂直２等分線は$p \leqq x \leqq p+m$の範囲内で少なくとも３つの格子点を通る。
(証明) AとBの中点Cの座標は$(p+m/2, q+n/2)$であり、mもnも偶数であるから、Cは格子点である。また、AとBを結ぶ直線の傾きはn'/m'であり、AとBの垂直２等分線の傾きは$-m'/n'$の整数比で表される。AとBの垂直２等分線はCを通り、$D(p+m/2-n', q+n/2+m')$と$E(p+m/2+n', q+n/2-m')$の２点も垂直２等分線上にあり、点Cは格子点であるから、D,Eも格子点である。仮定より$m \geqq n$であり、$n' \leqq n/2$であるから、$p+m/2-n' \geqq p$かつ$p+m/2+n' \leqq p+m$となることがわかる。　□

補助定理２　m, nが共に奇数のとき、$A(p, q)$と$B(p+m, q+n)$との垂直２等分線は$p \leqq x \leqq p+m$の範囲内で少なくとも２つの格子点を通る。
(証明) AとBの中点Cの座標は$(p+m/2, q+n/2)$であり、AとBの垂直２等分線の傾きは$-m'/n'$で表される。AとBの垂直２等分線はCを通るので、$D(p+m/2-n'/2, q+n/2+m'/2)$と$E(p+m/2+n'/2, q+n/2-m'/2)$の２点も垂直２等分線上にある。２つの奇数の最大公約数は奇数であるから、m'もn'も奇数である。したがって、$m/2 \pm n'/2$および$n/2 \pm m'/2$はいずれも整数になり、D, Eは格子点である。仮定より$m \geqq n$であるから、$p+m/2-n'/2 \geqq p$かつ$p+m/2+n'/2 \leqq$

p+mとなることがわかる。　　　　　　□

補助定理３　m, nがひとつずつ偶数と奇数のとき、A(p, q)とB(p+m, q+n)との垂直２等分線は格子点をひとつも通らない。
(証明) mが奇数でnが偶数のときを仮定する。AとBの中点Cの座標は(p+m/2, q+n/2)であり、x座標には0.5の端数がある。垂直２等分線上の点D(r, s)が格子点であるとき、r −(p+m/2)の小数部分は0.5で、s −(q+n/2)は整数になる。ここでt=2(r −(p+m/2))とおけば、tは小数部分が0.5の数の２倍なので奇数になる。CもDも垂直２等分線上の点であるから、その傾きからs −(q+n/2)：t/2＝−m′：n′となる。すなわち、tm′/2n′が整数になるはずである。m′とn′には公約数がないから、２はm′の約数で、n′はtの約数である必要がある。これは、m′が偶数で、n′が奇数であることを示し、当初の仮定に反する。したがって、垂直２等分線は格子点をひとつも通らない。
　mが偶数でnが奇数のときも同様の手順で示される。　　　　　　□

　補助定理３は定義２②を満たす折り方の存在を否定するものではない。点A(p, q)と点B(p+m, q+n)との垂直２等分線は格子点を通らないが、それと平行なAを通る線はA以外の格子点も通るからである。この線はたとえばF(p−n′, q+m′)やG(p+n′, q−m′)といった格子点を通るので、１回目はそこを利用して折ればよいことになる。ただし、点Fか点Gのどちらかは紙の上(端をふくむ)に存在している必要がある。どちらの点も紙の外になってしまうようであってはパズルが成立しなくなる。
　Fig.3に示すように、FAを利用して折るためには、[p, q]の左側にn′−1列の余白と、m′＞nの場合にはさらに[p+m, q+n]の上にm′− n行の余白が必要となる。AGを利用して折るためには、[p, q]の下側にm′−1行の余白が必要となる。FAとAGのどちらを利用するかは、文字やデザインの都合などで決めることになるが、mとnのとり方によってはかなり大きな余白を必要になる場合もある。
　余白の大きさによって、移動不可能となってしまう問題は、m, nが両方偶数の場合でも両方奇数の場合でも発生する。補助定理１および２により、ＡＢの垂直２等分線上の格子点を利用すれば左右へのはみ出しは起きないが、上下には余白が必要な場合がある(Fig.4は余白不要、Fig.5は必要となる例)。
　両方偶数の場合はFA,DC,CEのいずれかで[(2)]、両方奇数の場合はFA,AG,DEのいずれかで折ることになるが、AやC以外の格子点の位置が格子の移動の範囲を超えているときは余白が必要になる。

補助定理１～３およびここでの余白の議論より、以下の定理が明らかとなった。

定理１ [p, q]の格子を[p+m, q+n]に平行移動するには、p, qは以下の条件を満たさなければならない。

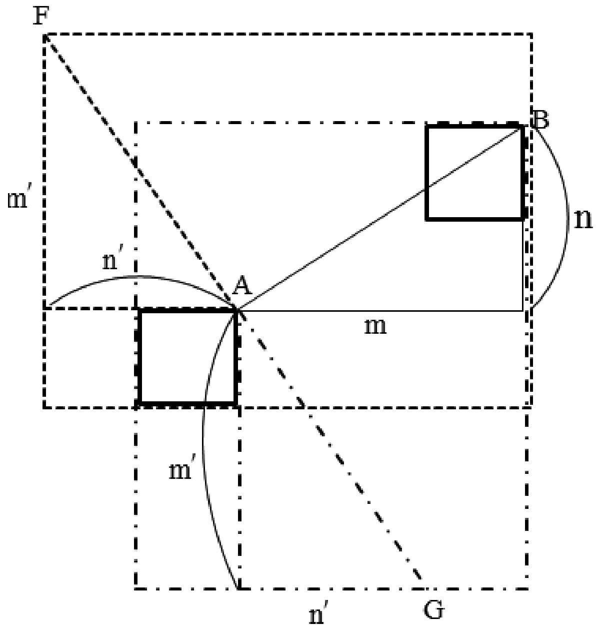

Fig.3　m, nが偶数と奇数の例（m＝3, n＝2、下または左上に余白が必要）

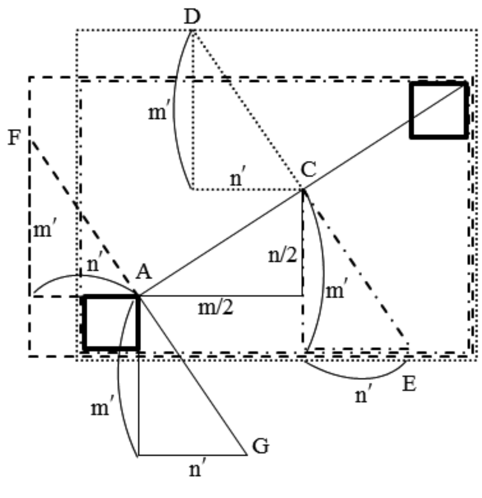

Fig.4　m, n共に偶数の例（m＝6, n＝4）

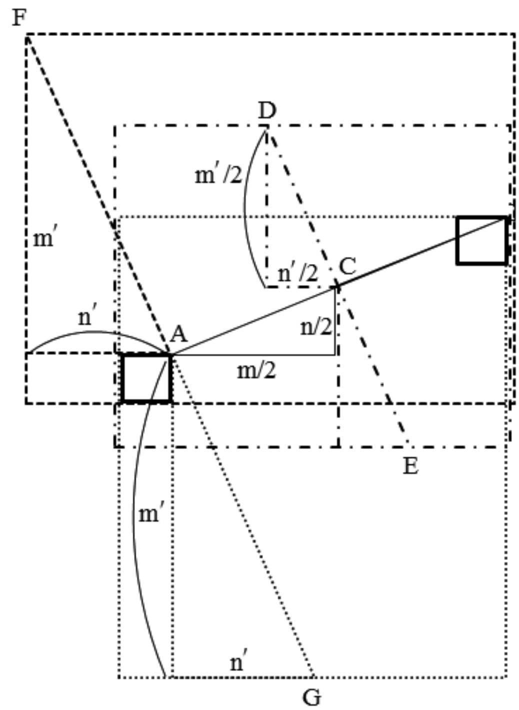

Fig.5　m, n共に奇数の例（m＝7, n＝3）

1）m, nが共に偶数のとき、次の条件a)～ c)のいずれか：

a）$q \geqq \max(1, m' - \frac{n}{2})$

b）$q \leqq b - \frac{n}{2} - \max(m', \frac{n}{2})$

c）$p \geqq n'$ かつ $q \leqq b - \max(m', n)$

2）m, nが共に奇数のとき、上記のc),次の条件d),e)のいずれか：

d）$\max(1, \frac{m'}{2} - \frac{n}{2}) \leqq q \leqq b - \frac{n}{2} - \max(m', \frac{n}{2})$

e）$q > m' - 1$

3）上記1), 2)以外のとき、上記のc),e)のいずれか。

Fig.4のように、余白が必要でない場合は、m≦20の範囲で、mとnの組全230通りのうち70通りある。いずれもm′, n′が都合よく小さな数になっているときである[(3)]。

3.　180度回転させる場合

格子のひとつを上下逆さまにして他の格子に重ねるということは、両格子は点対称の位置になっている。対称移動の中心は、両格子の対応する点(角でなくてもよい)の中点であり、旋回角は90度になる。すなわち、この対称の中心を通るようにして、直角に交わる2度の折り筋をつければ移動できる。

また、対称点は二つの格子の内点を結ぶ線分上に存在するので、必ず紙の内部にある(端や外にはならない)。

補助定理4　180度回転させる2つ折りパズルでは、移動先の格子には折り筋がつかない。

(証明) 2回目の折りでは鏡像の位置にある格子を移動するのであるから、移動先の格子に新たな折り筋はつかない。1回目は対称の中心を通るように折るのであるから、ここで移動先の格子に折り筋がつくならば、移動する格子の対応する場所にも折り筋がはいってしまい、定義2③を満たさなくなる。　□

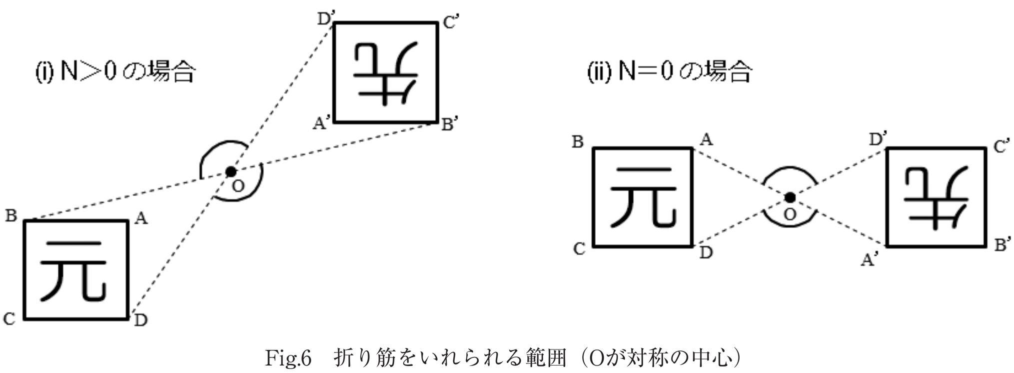

Fig.6　折り筋をいれられる範囲（Oが対称の中心）

移動元・移動先の両方を一度も折らないことになるので、折り筋のいれられる範囲はFig.6で示される。すなわち、対称の中心からの両格子への接線のつくる角(格子の内部を含まない側)である。

たとえば、頂点DとD'を結ぶ線で１回目を折り、格子が重なるよう２回目を折ればできあがる。このためには、折ることのできる範囲で90度の旋回角が得られることが必要である。

定理２　辺で隣接していない２つの格子は、折ることのできる範囲が90度以上ある。
(証明) ２つの格子の内部を分離する共通接線2本の交差角(格子を含むほうの)が90度以下ならばよい。２本の共通接線はFig.6(i)において、四角形BDB'D'の対角線になっている。辺BDと辺B'D'は共に格子の左上から右下への対角線であるから平行である。１組の対辺が平行である四角形の対角線が90度で交差するのは、この四角形が菱形のときである。それはDB'＝BD'＝$\sqrt{2}$のとき、すなわち、２つの格子が斜めに隣接しているときになる。それ以上に辺BDと辺B'D'は接近することはないので、２本の共通接線の格子を含むほうの交差角は常に90度以下である。n＝０の場合は、Fig.6(ii)のように、四角形ADA'D'で同じ論議ができる。 □

辺で隣接している2つの格子の場合、それらの内部を分離する共通接線は、２本が重なってしまっており、折ることのできる角度も０度なので、180度回転して折り重ねることはできない。折ることのできる部分が90度よりも大きい場合は、複数の折り方ができることが多い(紙の大きさによる)。

4.　90度回転させる場合

左右どちらであっても90度回転させるのであるから、旋回角は45度になる。回転の中心となる位置は格子点とは限らないし、紙面の外の場合もある。回転前後の格子の対応する点の垂直2等分線の交点が回転の中心となる。右に90度回転する場合、回転の中心は$(p-1+\frac{1}{2}(m+n+1), q-1+\frac{1}{2}(-m+n+1))$となり、左回転の場合は$(p-1+\frac{1}{2}(m-n+1), q-1+\frac{1}{2}(m+n+1))$となる。回転の中心のx座標はm,nがどのような数であっても、いずれもp以上となり、移動元の内部になることはない。

以下、まずは右回転の場合を考える。また、p=q=1とする。移動元と移動先との間に、回転の中心において45度をなす折り筋をつけるわけであるから、Fig.2(v)のように移動元の格子が旋回角内にすっぽり含まれるか、Fig.2(iii)のように旋回角外に完全に出ているかのどちらかが必要であり、２つの格子の間で折り筋をつけられる場所には制限がある。前者は、移動元下側の接線OCから45度右回転した位置OEから、上側の接線OAまでの範囲が該当する。移動元と中心が非常に近くて、OCとOAのなす角が45度を超えているときにはこの範囲は存在しない。後者を満たすのは、中心から移動先への右接線OA'から45度左回転した位置OFまで、右接線を除いた部分となる。この右接線OA'と移動元の上接線OAとは90度の開きがあるからここの範囲は常に存在する。

あとは、回転の中心を通る直線のなかに、２つの格子点を含むもの(ひとつの格子点は中心と同一でもよい)がこの範囲内にあれば、１回目の折り筋のひとつが決定される。

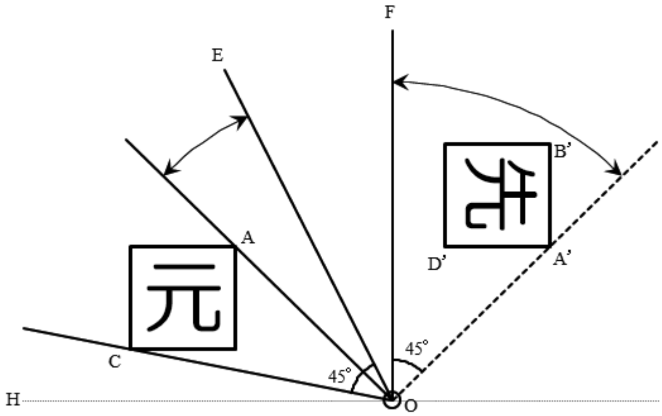

Fig.7　右90度回転のために折ることのできる範囲

(i) n＝０の場合

回転の中心Oは$(\frac{1}{2}(m+1), \frac{1}{2}(-m+1))$となり、Fig.7の点D'の座標は(m, 0)である。すなわち、OとD'を通る直線の傾きは１になるので、移動先の対角線と一致して、この直線は点B'も通る。したがって、１度目は２つの格子点B'とD'を通るように山折りをして、２度目は移動元が移動先に重なるように谷折りすればよい(Fig.9(ii)参照)。

(ii) m＞n＞０の場合

回転の中心は$(\frac{1}{2}(m+n+1), \frac{1}{2}(-m+n+1))$となる。m+nと-m+nの偶奇は一致するから、中心は格子点もしくは格子の中心のどちらかになる。中心のy座標は常に０以下であるから、OCは水平な線OHと０度以上の角をなし、角EOHは45度以上となる。また、m＝2, n＝1のとき、角AOHの大きさが最大の45度になり、それ以外の場合は45度未満となる[(4)]。

したがって、左上がり45度の線をOAとOEの間に折ることができ、この折り筋は中心と(0, n+1)も通る(Fig.9(i)参照)。

(iii) m＝n≧４の場合

回転の中心は$(m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$となり常に格子の中心になる。中心のy座標は常に0.5であるから、Oから移動元への下側接線OBは左下がりとなってしまい、角EOHは45度未満となるので、(ii)の方法は使えない。また、OA'は垂直よりも右に傾いた線となるため、OF側も左上がりの45度線を含まない。

rを奇数としたとき、たとえば格子点$(m+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r, 1)$は中心から$(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2})$だけ離れた場所にあり、ここと中心を通る線は、別の格子点$(m+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}r, 2)$も通るので、この線が折ることのできる範囲にあれば、解決する。

r＝１では45度線になってしまうので、r＝３で検討する。このとき、格子点J(m-1, 1)とK(m-4,2)と中心を通ることになる。直線OAは(1,1)と中心を結んでいるので、OA間でのy座標は１未満であり、Jすなわち直線OJはOAよりも上方に位置する。また、OEはR$(m-1, 2-\frac{3}{2m})$を通り[(5)]、$\frac{3}{2m}<1$だからJはRの下方となり、すなわち、OJはOEとOAの間に存在することが解る。

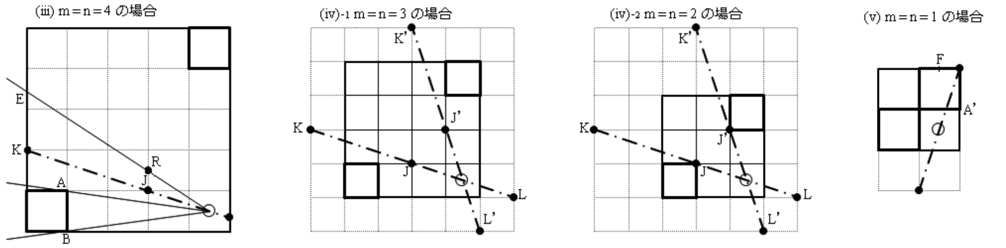

Fig.8　m＝nの場合

したがって、格子点J(m−1, 1)とK(m−4, 2)とを通る線で１回目を折る(Fig.8(iii)参照)。

(iv)　m＝n＝３または２の場合

上記と同じ論議で、格子点J(m−1, 1)と K(m−4, 2)とを通る線で１回目を折ればいいのだが、点Kが移動元と移動先を対角とする長方形からはみ出してしまう。JとL(m＋2, 0)で折る方法もあるが、やはりLがはみ出す。J'(m, 2)とK'(m−1, 5),L'(m＋1, −1)の場合も同様。

したがって、m= ２の場合には、p＞2,p＋2≦a－1,q＞1,q＋2≦b－2いずれかの条件を満たす必要がある。上下左右のいずれかの外側に1 ～ 2マスの余裕が必要になる。

また、m= ３の場合には、p＞1,p＋3≦a－1,q＞1,q＋3≦b－1 いずれかの条件がつき、上下左右のいずれか外側に１マスの余裕が必要になる(Fig.8(iv)参照)。

(v)　m＝n＝１の場合

回転の中心が($\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$)となり、OFが移動先の格子を垂直に、移動元への下側接線から45度右回転した線が格子を水平に横切る形となる。折るのが可能な範囲が、A'OF側だけとなり、そこの存在する格子点は(2, 2)のみである。したがって、その格子点と回転の中心に関して対称の場所にある格子点(1, −1)を結んで折る。もちろんこの格子点は移動元と移動先を対角とする長方形からはみ出しているので、q≧2の場合のみ可能になる(Fig.8(v)参照)。

以上、検討してきたように、右90度回転は、紙の余白の条件がつくものが３とおりだけあるが、すべての場合に折り上げることが可能であった。

次に左回転を考える。実は左回転は、移動元と移動先を入れ替えて、右回転を上下逆さまに見たものになっている(Fig.9参照)。

したがって、右回転で移動先に折り目のつかない折りかたをしているもの(n≠0のものすべて)については、右回転のときと(p-1+$\frac{1}{2}$(m+1),q-1+$\frac{1}{2}$(n+1))に関して点対称に折ればできる。右回転でm＝n＝１の場合は移動先に折り目がつくが、これも点対称に折れば左回転できる。

上記以外のもの(n＝０のものすべて)については、移動元と移動先を入れ替ずに上下反転しているだけなので、右回転のときとy＝q＋$\frac{1}{2}$を対称軸に線対称になるように折ればできる。

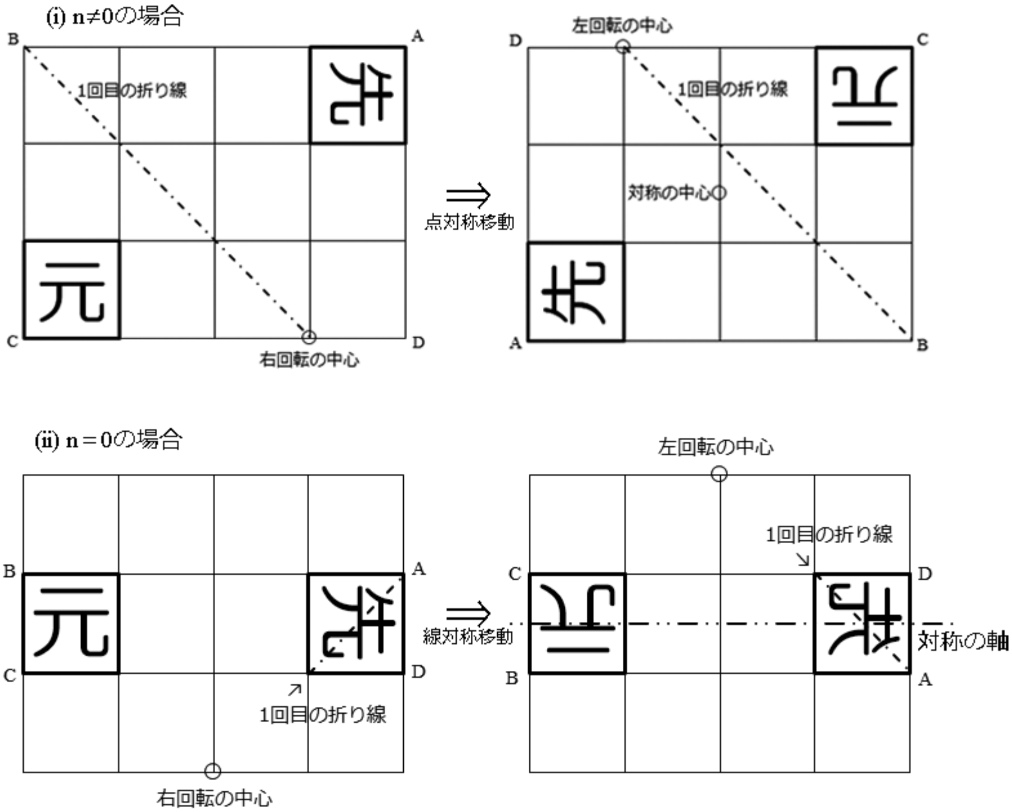

Fig.9　右回転と左回転

以上で、左右90度回転についてすべての場合を解明できたので、最後に定理としておく。

定理３ [p, q]の格子を[p+m, q+n]に90度右回転して折り重ねするには、１度目を以下の目印で山折りする。左回転は【　】内。
１）n＝０の場合　移動先の左下から右上の対角線【左上から右下】
２）m＞n＞０の場合　(p－1, q＋n)格子点から右下がり45度線【(p＋m, q)から左上がり】
３）m＝n≧２の場合　(p＋m－2, q)と(p＋m－5, q＋1)を通る線。ただしm= ２または３の場合には上記(iii)で結論付けた条件を満たす必要がある。【(p＋2, q＋n－1)と(p＋4, q＋n－2)】
４）m＝n＝１の場合　q＞１の条件のもと、(p＋1, q－2)と(p＋2, q＋1)【(p－2, q＋2)と(p＋1, q＋1)】

5. ま　と　め

２つ折りパズルは上原2017[1]で紹介されている。わずか2回折るだけで解答が得られるものではあるが、甘く見ているとなかなか答えを見つけられないところにこのパズルの難しさがある。本稿では、それぞれの移動についてひとつの解を与えたが、他に解法が存在する配置は多い。た

とえば、Fig.2（v）とFig.9（ii）は共にn＝０の左90度回転であるが、前者のように紙の大きさに余裕があると、かなり違った折り方も可能になる。Fig.1はm＝2, n＝1の90度左回転の例であるが、前節で示した折り方では完成できないようにしてある。すなわち、移動元と移動先の配置だけでなく、付随して動く部分を含めてデザインなどを工夫して、複数の解の可能性をつぶしておく手間をかけることにより、娯楽としての面白さは向上する。本稿で示したような実行可能性の礎のうえに、見た目の華やかさや挑戦の面白さを価値として加えて商品となるわけで、そこがデザイナーや作家の腕の見せ所となるのである。そして、答えを出すのに悪戦苦闘した人には記憶に残るものとなるであろう。

商品としての面白さを客観的に評価することは難しいが、本稿考察により実行可能性を確証できたものが多いので、よい商品が数多く生み出されることを望みたい。また、あらゆる折り方を列挙して、解の唯一性とパズルとしての面白味を検証する方法を今後の課題としたい。

注記

(1) 垂直２等分線は直線$y=-1.5x+1.5p+q+3.25$ となる。$x=1,2,\cdots$のとき、左辺には0.25か0.75かの１未満の端数がつくから、yは整数にならない。
$y=1, 2,\cdots$のとき、$x=\frac{1}{3}(-2y+3p+2q+6.5)$であるから、括弧のなかで必ず0.5の端数が発生し、xは整数にならない。

(2) 点Aよりも点Cのほうが右上にあるので、GはEよりもy座標が小さい。したがって、AGを利用して折るときに使う余白は、CEでの余白よりも常に広く必要となる。よって、m, nの両方が偶数のときはAGで折ることは考慮の対象にしなくてよい。

(3) 移動元と移動先を対角とする長方形以外の余白を必要としないのは、n＝０の場合と、n＝mの場合に加え、m≦20の範囲では以下の30通りがある：

m	n	m	n	m	n	m	n	m	n	m	n
4	2	9	3	12	8	15	9	18	6	20	8
6	3	10	5	12	10	16	4	18	9	20	10
6	4	10	8	14	7	16	8	18	12	20	12
8	4	12	4	14	12	16	12	18	16	20	16
8	6	12	6	15	5	16	14	20	5	20	18

(4) $\tan\angle COH=\frac{m-n-1}{m+n+1}$, $\tan\angle AOH=\frac{m-n+1}{m+n-1}$より、正接の加法公式を用いて
$\tan\angle AOC=\frac{2m}{m^2+n^2-1}$となる。分母$=(m^2-n^2)+2n^2-1$と変形すると、$m^2-n^2\geqq 2m-1, 2n^2\geqq 2$であるから、常に分母$\geqq 2m$となり、∠AOCはいつでも45度以下である。

(5) $\tan\angle HOB=\frac{1}{2m-1}$, $\tan\angle HOR=\frac{2y-1}{3}$である。加法公式により、
$\tan\angle BOR=\frac{3+(2y-1)(2m-1)}{3(2m-1)-(2y-1)}$となる。$\angle BOR=45^\circ$のため、これを1とおいて、$y=2-\frac{3}{2m}$である。

参　考　文　献

[1] 上原隆平, 折り紙パズルへの誘い, 折紙探偵団マガジン, 2017, No.161, pp.13-15.
[2] H. Kawasaki, An Application of a Theorem of Alternatives to Origami, Journal of the Operations Research Society of Japan, 2017, Vol.60, pp.393-399.
[3] 川崎敏和, バラと折り紙と数学と, 1998, 森北出版.

〔2017. 9. 28　受理〕

コントリビューター：山下　明博　教授（造形デザイン学科）